ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1986

MATHEMATIQUES II

(2 pages dactylographiées)

TA

On se place dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $R_0 = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point générique de l'espace étant désignées par x, y, z on considère le cercle Γ, les droites D et D' définis par les équations suivantes :

$$\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad D \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Lorsque u et v parcourent $\mathbb{R}$

les points N(u) de coordonnées $\begin{cases} x = 3 - 2u^2 \\ y = 4u \\ z = 0 \end{cases}$

et P(v) de coordonnées $\begin{cases} x = 2v^2 + 1 \\ y = 0 \\ z = 4v \end{cases}$

décrivent des courbes paramétrées, notées respectivement $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$.

PREMIERE PARTIE

I.1. Préciser la nature et les éléments remarquables des courbes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$. Représenter, par un croquis perspectif à main levée, les axes de coordonnées, les courbes Γ, $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, D, D'.

I.2.a) Calculer la norme euclicienne $\ell(u, v)$ du vecteur $\overrightarrow{N(u)P(v)}$ et l'exprimer comme un polynôme en u et v du second degré.

b) Montrer que l'on peut définir une fonction vectorielle $(u, v) \mapsto \overrightarrow{K(u, v)}$ telle que pour tout couple (u, v) de réels on ait :

$$\overrightarrow{N(u)P(v)} = \ell(u, v)\ \overrightarrow{K(u,v)}$$

Montrer que cette fonction admet pour tout couple (u, v) des dérivées partielles premières continues, que l'on notera $\vec{K}'_u$ et $\vec{K}'_v$.

I.3. On note $\overrightarrow{N'(u)}$ (respectivement $\overrightarrow{P'(v)}$) les vecteurs $\frac{d\,\overrightarrow{ON}}{du}$ (respectivement $\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dv}$)

a) Montrer que, quel que soit u, $\overrightarrow{N'(u)}$ est non nul.

b) Etablir, pour tout couple (u, v) de réels, les relations

$$\overrightarrow{P'(v)}.\ \overrightarrow{K(u, v)} = 4v \qquad \overrightarrow{N'(u)}.\ \overrightarrow{K(u, v)} = -4u$$

c) En déduire que, pour tout u, le cône de sommet N(u) et de directrice $\mathcal{P}$ est contenu dans un cône de révolution d'axe dirigé par $\overrightarrow{N'(u)}$ ou dans un plan orthogonal à $\overrightarrow{N'(u)}$. Ce cône (ou ce plan) sera noté $\mathcal{C}(u)$.

De même, à tout point P(v) correspond un cône de révolution d'axe dirigé par $\overrightarrow{P'(v)}$ (cône éventuellement réduit à un plan) contenant $\mathcal{N}$. On le désignera par $\mathcal{C}_1(v)$.

d) On pose : $u = \operatorname{tg}\theta \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$. Calculer en fonction de θ le demi-angle au sommet de $\mathcal{C}(u)$.

I.4. Montrer, pour tout couple (u, v) de réels, les propriétés suivantes :

i) les vecteurs $(\overrightarrow{K(u, v)}, \overrightarrow{N'(u)}, \overrightarrow{P'(v)})$ forment un système libre :

ii) les familles de vecteurs $(\overrightarrow{K'_u(u, v)}, \overrightarrow{K(u, v)}, \overrightarrow{N'(u)})$ et $(\overrightarrow{K'_v(u, v)}, \overrightarrow{K(u, v)}, \overrightarrow{P'(v)})$ sont des familles liées .

iii) $\vec{K}'_u.\vec{K}'_v = 0$

En déduire que les plans vectoriels $(\overrightarrow{N'(u)}, \overrightarrow{K(u, v)})$ et $(\overrightarrow{P'(v)}, \overrightarrow{K(u, v)})$ sont perpendiculaires.

DEUXIEME PARTIE

Conservant les notations du (I), on pose toujours :

$u = \operatorname{tg}\theta$, où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

II.1°.a) Donner dans le plan xoy une équation de l'axe du cône $\mathcal{C}(\operatorname{tg}\theta)$.

page 90 1986 Concours commun Centrale-Sup. Elec. Math 2. Option TA

b) Montrer que, pour $\theta \neq 0$, le plan d'équation

$$y - x \operatorname{tg}\theta = 0$$

coupe $\mathcal{C}(\operatorname{tg}\theta)$ suivant un cercle Ω_θ.

c) Soit H_θ la projection orthogonale de $N(\operatorname{tg}\theta)$ sur la droite D' et J_θ le point autre que l'origine où la droite OH_θ coupe le cercle Γ; établir que les deux génératrices de $\mathcal{C}(\operatorname{tg}_\theta)$ situées dans le plan xoy sont les droites $N(\operatorname{tg}\theta)\ J_\theta$ et $N(\operatorname{tg}\theta)\ H_\theta$.

d) Donner le rayon de la sphère de centre $N(\operatorname{tg}\theta)$ contenant Ω_θ.

e) Représenter, dans le plan xoy, les axes ox et oy, la droite D', le cercle Γ, les deux génératrices de $\mathcal{C}(\operatorname{tg}\theta)$ situées dans ce plan et la droite OH_θ.

II.2°.a) Soit Ω_θ la sphère de centre $N(\operatorname{tg}\theta)$ contenant le cercle Ω_θ ; donner une équation de cette sphère.

b) Soit Σ la surface engendrée par Ω_θ quand θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en restant non nul ; montrer que Σ est contenue dans la surface S d'équation :

$$x(x^2 + y^2 + z^2) - 6x^2 - 4y^2 + 8x = 0$$

Ouels sont les points de S qui n'appartiennent pas à Σ ?

II.3°) On pose, pour θ non nul :

$$\omega_\theta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4x\operatorname{tg}^2\theta - 8y\operatorname{tg}\theta + 8$$

$$s(x, y, z) = x\,(x^2 + y^2 + z^2) - 6x^2 - 4y^2 + 8x$$

a) Former $s(x, y, z) - x\,\omega_\theta(x, y, z)$;

b) En déduire que tous les points de Σ sont des points réguliers (ou ordinaires) de la surface S ; comparer en un point de Σ les gradients des deux fonctions s et ω_θ.

c) Quel est l'ensemble des points d'intersection avec xOy des normales à S aux points de Ω_θ pour θ fixé ?

II.4°. Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}$ et le repère $R_A = (A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par X, Y, Z les coordonnées du point générique de l'espace dans ce repère.

a) Etablir l'équation de S dans ce repère.

b) Montrer que S admet au moins deux plans de symétrie et trois axes de symétrie.

c) En déduire une nouvelle famille de cercles situés sur S. Ces cercles engendrent une surface S_1 contenue dans S ; préciser les points de S non situés sur S_1.

Illustrer cette génération de S_1 par un croquis perspectif.

II.5°. Que peut-on dire des traces sur le plan xOz des normales à S ? Caractériser l'ensemble des normales à S.

*****

***

*

TA